# Ejercicios de Modelos de Probabilidad

Elisa M. Molanes-López, Depto. Estadística, UC3M

## Binomial, Poisson, Exponencial y Uniforme

**Ejercicio 1**. Se dispone de un sistema formado por dos componentes similares conectados en paralelo y que funcionan independientemente el uno del otro.

a) Si el tiempo de vida de cada componente se puede modelizar a través de una Exponencial con media 5000 horas, ¿cuál es la probabilidad de que el sistema esté al menos 10000 horas en funcionamiento ininterrumpido?

b) Supongamos que el sistema lleva ya 8000 horas en funcionamiento, ¿qué probabilidad hay de que llegue a las 10000 horas, es decir, que funcione al menos 2000 horas más?

**Solución**: Sea $T_i$ el tiempo de vida en horas del componente $i$, siendo $i = 1, 2$. Se sabe que $T_i$ sigue una distribución Exponencial con parámetro $\lambda_i$ y media $E[T_i] = 5000$ horas. Dado que $\lambda_i = 1/E[T_i]$, resulta que $\lambda_i = 1/5000$ h$^{-1}$ para $i = 1, 2$. Sea $T$ el tiempo de vida en horas del sistema completo.

a) Nos piden $\Pr(T > 10000 \text{ h})$. Teniendo en cuenta la independencia de sucesos, la propiedad del suceso contrario y las leyes de Morgan, resulta que:

$$\begin{aligned}
\Pr(T > 10000) &= \Pr(\{T_1 > 10000\} \cup \{T_2 > 10000\}) \\
&= 1 - \Pr(\overline{\{T_1 > 10000\} \cup \{T_2 > 10000\}}) \\
&= 1 - \Pr(\overline{\{T_1 > 10000\}} \cap \overline{\{T_2 > 10000\}}) \\
&= 1 - \Pr(\{T_1 \leq 10000\}) \Pr(\{T_2 \leq 10000\}) \\
&= 1 - (1 - e^{-2})^2 = 0{,}25235.
\end{aligned}$$

Nótese que hemos usado el hecho de que

$$\Pr(T_1 \leq 10000) = \int_0^{10000} \frac{1}{5000} e^{-t/5000} \mathrm{d}t = 1 - e^{-2} = 0{,}86466.$$

b) Nos piden $\Pr(T > 10000 | T > 8000)$. Utilizando la definición de probabilidad condicionada, resulta que:

$$\Pr(T > 10000 | T > 8000) = \frac{\Pr(T > 10000)}{\Pr(T > 8000)} = \frac{1 - (1 - e^{-2})^2}{1 - (1 - e^{-8/5})^2} = 0{,}69513.$$

Nótese que $\Pr(T > 8000)$ se calcula de modo análogo a $\Pr(T > 10000)$.

**Ejercicio 2**. Se dispone de un sistema formado por dos componentes similares conectados en serie y que funcionan independientemente el uno del otro.

a) Si el tiempo de vida de cada componente se puede modelizar a través de una Exponencial con media 5000 horas, ¿cuál es la probabilidad de que el sistema esté al menos 10000 horas en funcionamiento ininterrumpido?

b) Supongamos que el sistema lleva ya 8000 horas en funcionamiento, ¿qué probabilidad hay de que llegue a las 10000 horas, es decir, que funcione al menos 2000 horas más?

**Solución**: Sea $T_i$ el tiempo de vida en horas del componente $i$ ($i = 1, 2$). Se sabe que $T_i$ sigue una distribución Exponencial con parámetro $\lambda_i$ y media $E[T_i] = 5000$ horas. Dado que $\lambda_i = 1/E[T_i]$, resulta que $\lambda_i = 1/5000$ h$^{-1}$ para $i = 1, 2$. Sea $T$ el tiempo de vida en horas del sistema completo.

a) Nos piden $\Pr(T > 10000$ h$)$. Teniendo en cuenta la independencia de sucesos, la propiedad del suceso contrario y las leyes de Morgan, resulta que:

$$\begin{aligned}
\Pr(T > 10000) &= \Pr(\{T_1 > 10000\} \cap \{T_2 > 10000\}) \\
&= \Pr(T_1 > 10000) \Pr(T_2 > 10000) \\
&= (1 - \Pr(T_1 \leq 10000))(1 - \Pr(T_2 \leq 10000)) \\
&= (e^{-2})^2 = 0{,}01832.
\end{aligned}$$

Nótese que hemos usado el hecho de que $\Pr(T_1 \leq 10000) = 1 - e^{-2} = 0{,}86466$.

b) Nos piden $\Pr(T > 10000|T > 8000)$. Utilizando la definición de probabilidad condicionada, resulta que:

$$\Pr(T > 10000|T > 8000) = \frac{\Pr(T > 10000)}{\Pr(T > 8000)} = \frac{(e^{-2})^2}{(e^{-8/5})^2} = 0{,}44933.$$

Nótese que $\Pr(T > 8000)$ se calcula de modo análogo a $\Pr(T > 10000)$.

*Nota interesante: A diferencia con el apartado b) del Ejercicio 1, en esta ocación sucede que $T$ se puede ver como el mínimo de dos tiempos exponenciales independientes, es decir, $T = \min\{T_1, T_2\}$. Bajo esta circunstancia, es sencillo demostrar que $T$ sigue un modelo Exponencial con parámetro igual a la suma de los parámetros de las dos exponenciales implicadas, $T_1$ y $T_2$. Por este motivo, el apartado b) podría haberse resuelto utilizando la falta de memoria de la Exponencial, es decir, la probabilidad pedida coincidiría con $\Pr(T > 2000)$, siendo $T$ una v.a. Exponencial con parámetro $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 2/5000$ $h^{-1}$.*

**Ejercicio 3**. Sea $X$ la v.a. horas que se dedica a realizar una actividad, cuya función de densidad viene dada por $f(x) = \frac{1}{4}(x + 1)$, si $0 < x < 2$.

a) Calcule la probabilidad de que el tiempo empleado sea superior a una hora.

b) Aproxime, mediante simulación en MATLAB/Octave, la probabilidad calculada en el apartado a).

c) Si se realizan diez actividades según la v.a. $X$, calcule la probabilidad de que en exactamente 3 de ellas el tiempo empleado en realizar cada una de ellas sea superior a la hora y media.

d) Aproxime la probabilidad del apartado c) mediante simulación en MATLAB/Octave.

**Solución**: Dado que $X$ tiene función de densidad, sabemos que $X$ es una v.a. continua. Además, su rango de valores es $R_X = (0, 2)$, (donde su densidad, $f(x)$, es estrictamente positiva).
Calculemos su función de distribución:
Sea $x \leq 0$, entonces $F(x) = 0$.
Sea $x \in (0, 2)$, entonces

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{4}(y + 1)\mathrm{d}y = \frac{x^2}{8} + \frac{x}{4}.$$

Sea $x \geq 2$, entonces $F(x) = 1$.

De modo que:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{x^2}{8} + \frac{x}{4}, & \text{si } x \in (0,2), \\ 1, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

a) $\Pr(X > 1) = 1 - \Pr(X \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - (\frac{1}{8} + \frac{1}{4}) = \frac{5}{8}$.

b) Utilizando el método de la inversa debemos resolver en $x$ la ecuación $F(x) = u$ para $x \in (0,2)$, siendo $u$ un número aleatorio generado de una distribución Uniforme en $(0,1)$.

$$\frac{x^2}{8} + \frac{x}{4} = u \Rightarrow x = -1 + \sqrt{1 + 8u}.$$

De modo que el código en Matlab para aproximar la probabilidad del apartado a) sería:

```
n=10000;
u=rand(n,1);
x=-1+sqrt(1+8*u);
cond=(x>1);
pa=sum(cond)/n
```

c) Sea $Y$ la v.a. que cuenta el número de actividades, de entre un total de 10, cuyo tiempo de realización supera la hora y media. Se sabe que $Y$ sigue una distribución Binomial con parámetros $n = 10$ y $p = \Pr(X > 1{,}5 \text{ h}) = 1 - F(1{,}5) = 1 - \left(\frac{9}{32} + \frac{3}{8}\right) = \frac{11}{32}$. Nos piden $\Pr(Y = 3)$. Utilizando la función de probabilida de $Y$ resulta que:

$$\Pr(Y = 3) = \binom{10}{3} (11/32)^3 (21/32)^7 = 0{,}2555.$$

d) El código en Matlab para aproximar la probabilidad del apartado c) sería:

```
n=10000;
u=rand(n,10);
x=-1+sqrt(1+8*u);
cond=(x>1.5);
y=sum(cond,2);
pc=sum(y==3)/n
```

**Ejercicio 4**. El gerente de un restaurante que sólo da servicio mediante reservas sabe que el 15 % de los clientes que hacen una reserva, al final no acudirán al restaurante. Para hacer negocio la política del restaurante consiste en aceptar un máximo de 25 reservas aun cuando sólo disponga de 20 mesas en total.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día concreto para el que se tienen anotadas 25 reservas, se les pueda asignar mesa a todas las personas que acudan (con reserva)?

b) ¿Cómo simularías en MATLAB/Octave la probabilidad calculada en el apartado anterior?

**Solución**: Sea $A$ el suceso «el cliente que ha hecho una reserva, finalmente acude al restaurante». Sabemos que $\Pr(\overline{A}) = 0{,}15$.

a) Sea $Y$ la v.a. que cuenta el nº de clientes que habiendo hecho reserva (es decir, de un total de 25 clientes), acuden al restaurante. $Y$ se distribuye según una Binomial con parámetros $n = 25$ y $p = \Pr(A) = 1 - \Pr(\overline{A}) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$. Nos piden:

$$\begin{aligned} \Pr(Y \leq 20) &= 1 - \Pr(Y > 20) = 1 - \Pr(Y \geq 21) \\ &= 1 - \Pr(Y = 21) - \Pr(Y = 22) - \Pr(Y = 23) - \Pr(Y = 24) - \Pr(Y = 25). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} \Pr(Y = 21) &= \binom{25}{21} \cdot 0{,}85^21 \cdot 0{,}15^4 = 0{,}2110, \\ \Pr(Y = 22) &= \binom{25}{22} \cdot 0{,}85^22 \cdot 0{,}15^3 = 0{,}2174, \\ \Pr(Y = 23) &= \binom{25}{23} \cdot 0{,}85^23 \cdot 0{,}15^2 = 0{,}1607, \\ \Pr(Y = 24) &= \binom{25}{24} \cdot 0{,}85^24 \cdot 0{,}15^1 = 0{,}0759, \\ \Pr(Y = 25) &= \binom{25}{25} \cdot 0{,}85^25 \cdot 0{,}15^0 = 0{,}0172, \end{aligned}$$

se concluye que $\Pr(Y \leq 20) = 1 - 0{,}2110 - 0{,}2174 - 0{,}1607 - 0{,}0759 - 0{,}0172 = 0{,}3179$.

b) Opción 1:

```
n=100000;
pA=0.85;
u=rand(n,25);
x=1.*(0<u & u<pA) + 0.*(pA<=u & u<1);
y=sum(x,2);
prob_a=sum(y<=20)/n
```

Opción 2:

```
n=100000;
pnoA=0.15;
u=rand(n,25);
x=1.*(0<u & u<pnoA) + 0.*(pnoA<=u & u<1);
y=sum(x,2);
prob_a=sum(y>=5)/n
```

**Ejercicio 5**. Supongamos que el número de imperfecciones en un alambre fino de cobre sigue una distribución de Poisson con media 2.3 imperfecciones por milímetro de longitud. Se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentren dos imperfecciones en 1 mm de alambre?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentren al menos dos imperfecciones en 3 mm de alambre?

c) Determine la probabilidad de que la distancia entre dos imperfecciones consecutivas sea superior a 2 mm.

**Solución**:

a) Sea $X$ la variable aleatoria (v.a.) «Número de imperfecciones por mm de alambre de cobre». Sabemos que $X$ sigue un modelo de Poisson con parámetro $\lambda_X = \mu_X = 2{,}3$ imperfecciones/mm. Nos piden $\Pr(X = 2)$. Utilizando que la función de probabilidad de esta v.a. es:

$$p(k) = \Pr(X = k) = \frac{\exp(-\lambda_X)\lambda_X^k}{k!}, \quad \text{si } k = 0, 1, 2 \ldots,$$

se tiene que:

$$\Pr(X = 2) = \frac{\exp(-2{,}3)2{,}3^2}{2!} = 0{,}2652.$$

b) Sea $Y$ la v.a. «Número de imperfecciones en 3 mm de alambre». Por la reproductividad de la Poisson se verifica que $Y$ sigue un modelo de Poisson con parámetro $\lambda_Y = 3\lambda_X = 6{,}9$. Nos piden $\Pr(Y \geq 2)$. Utilizando la propiedad del suceso contrario y la función de probabilidad de la Poisson, se concluye que:

$$\begin{aligned} \Pr(Y \geq 2) &= 1 - \Pr(Y < 2) = 1 - \Pr(Y = 0) - \Pr(Y = 1) \\ &= 1 - \frac{\exp(-6{,}9)6{,}9^0}{0!} - \frac{\exp(-6{,}9)6{,}9^1}{1!} = 0{,}9920. \end{aligned}$$

c) Asociada a una Poisson siempre existe una v.a. exponencial. En este caso, si denotamos por $D$ a la v.a. «distancia en mm que existe entre dos imperfecciones consecutivas en dicho alambre de cobre», se verifica que $D$ sigue un modelo exponencial de parámetro $\lambda_X = 2{,}3 \text{ mm}^{-1}$. Nos piden $\Pr(D > 2 \text{ mm})$. Utilizando que la distribución de $D$ es $F_D(x) = 1 - \exp(-2{,}3x)$, se concluye que:

$$\begin{aligned} \Pr(D > 2 \text{ mm}) &= 1 - \Pr(D \leq 2) = 1 - F_D(2) \\ &= 1 - (1 - \exp(-2{,}3 \times 2)) = \exp(-4{,}6) = 0{,}0101. \end{aligned}$$

**Ejercicio 6**. Un servicio de asistencia técnica en carretera ha comprobado que en las mañanas de los fines de semana el número de llamadas que recibe, por término medio, es de 3 llamadas cada hora. Un operario comienza su jornada de sábado a las 8 de la mañana. Suponiendo que las llamadas se realizan de forma independiente y con tasa constante:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que reciba la primera llamada antes de las 8:15?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que reciba 4 llamadas en las dos primeras horas de su jornada de trabajo?

c) Si lleva 10 minutos sin recibir ninguna llamada, ¿cuál es la probabilidad de que reciba una nueva llamada en menos de 15 minutos?

**Solución**: Sea $X$ la v.a. que cuenta el número de llamadas que recibe cada hora un servicio de asistencia técnica en carretera los fines de semana por la mañana. Se sabe que $X$ sigue una distribución de Poisson con parámetro $\lambda$. Dado que $E[X] = 3$ llamadas por hora y $\lambda = E[X]$, resulta que $\lambda = 3$ llamadas/h.

a) Sea $T$ la v.a. que mide el tiempo en horas transcurrido entre dos llamadas consecutivas. Sabemos que $T$ sigue un modelo Exponencial con parámetro $\lambda = 3 \text{ h}^{-1}$ y media $E[T] = 1/\lambda = 1/3 = 0{,}33333$ h. Nótese que, teniendo en cuenta la falta de memoria de la Exponencial, $T$

también se puede interpretar como el tiempo en horas que transcurre desde el instante actual hasta que se produce la primera llamada. Entonces, la probabilidad pedida es

$$\Pr(T < 15 \text{ min}) = \Pr(T < 0{,}25 \text{ h}) = \int_0^{0,25} 3e^{-3t}\mathrm{d}t = -e^{-3t}\Big]_{t=0}^{t=0,25} = 1 - e^{-0,75} = 0{,}52763.$$

b) Sea $Y$ la v.a. que cuenta el número de llamadas recibidas en 2 horas. Si en 1 hora por término medio se recibían 3 llamadas, ahora en un intervalo de tiempo el doble de grande se recibirán por término medio el doble de llamadas, es decir 6. De modo que $Y$ se distribuye según una v.a. de Poisson con parámetro $\lambda = E[Y] = 6$.

Nos piden $\Pr(Y = 4)$. Utilizando la función de probabilidad de la Poisson se verifica que:

$$\Pr(Y = 4) = \frac{e^{-6}6^4}{4!} = 0{,}1339.$$

c) Nos piden $\Pr(T < 25 \text{ min}|T > 10 \text{ min})$. Si tenemos en cuenta que la Exponencial no tiene memoria, esta probabilidad se podría calcular mediante $\Pr(T < 15 \text{ min})$.

Hagámoslo primero utilizando la definición de probabilidad condicionada:

$$\begin{aligned}
\Pr(T < 25 \text{ min}|T > 10 \text{ min}) &= \frac{\Pr(10 \text{ min} < T < 25 \text{ min})}{\Pr(T > 10 \text{ min})} \\
&= \frac{\Pr(10/60 \text{ h} < T < 25/60 \text{ h})}{\Pr(T > 10/60 \text{ h})} \\
&= \frac{\int_{10/60}^{25/60} 3e^{-3t}\mathrm{d}t}{\int_{10/60}^{\infty} 3e^{-3t}\mathrm{d}t} \\
&= \frac{-e^{-3t}\Big]_{t=10/60}^{25/60}}{-e^{-3t}\Big]_{t=10/60}^{\infty}} \\
&= \frac{e^{-30/60} - e^{-75/60}}{e^{-30/60}} = \frac{e^{-30/60}(1 - e^{-45/60})}{e^{-30/60}} \\
&= 1 - e^{-0,75} = 0{,}5276.
\end{aligned}$$

Nótese que el valor obtenido coincide con el obtenido en el apartado a) $\Pr(T < 15 \text{ min}) = \Pr(T < 0{,}25 \text{ h}) = 1 - e^{-0,75} = 0{,}5276$.

**Ejercicio 7**. Supongamos que una partícula se lanza desde el origen del plano en línea recta, formando un ángulo $\theta$ con el eje de abscisas.
Denotemos por $Y$ la segunda coordenada del punto de choque o intersección de dicha partícula con la recta $x = 1$. Si sabemos que el ángulo $\theta$ se distribuye uniformemente en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$:

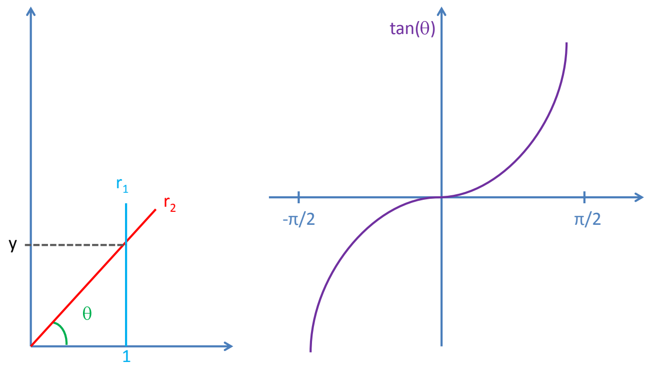
a) Calcule la función de densidad y de distribución de $Y$.

b) Calcule la probabilidad de que $Y$ sea mayor que cero.

c) Calcule la probabilidad de que $Y$ sea mayor que uno.

d) Mediante simulación con MATLAB/Octave aproxime las probabilidades pedidas en b) y c).

**Solución**:




a) Sea $X$ la v.a. que devuelve el ángulo $\theta$ y sea $Y$ la v.a. que devuelve la ordenada del punto de corte entre las dos rectas $r_1$ y $r_2$. Se sabe que $X$ es una v.a. uniformemente distribuida en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Teniendo en cuenta que $Y = h(X)$, siendo $h(x) = \tan(x)$, si $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, resulta que $X = \arctan(Y)$. Dado que $h$ es una función derivable e inyectiva en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, sabemos que la densidad de $Y$ es:

$$f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|.$$

Obsérvese que el rango de $Y$ es $R_Y = \Re$ y que derivando $x$ con respecto a $y$ se obtiene $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{1+y^2} > 0$. Entonces,

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2}, \text{ si } y \in \Re.$$

Calculemos su función de distribución. Sea $y \in \Re$,

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y = \frac{\arctan(y)}{\pi} + \frac{1}{2}.$$

Esta v.a. sigue un modelo de Cauchy y no tiene media.

b) $\Pr(Y > 0) = 1 - F_Y(0) = 1 - \left(\frac{\arctan(0)}{\pi} + \frac{1}{2}\right) = 0{,}5.$

c) $\Pr(Y > 1) = 1 - F_Y(1) = 1 - \left(\frac{\arctan(1)}{\pi} + \frac{1}{2}\right) = 0{,}5 - \frac{\pi/4}{\pi} = 0{,}25.$

d) Por el método de la inversa $F(y) = u$, siendo $u \in (0,1)$ un valor uniformemente distribuido en $(0,1)$ e $y \in \Re$. Entonces,

$$\frac{\arctan(y)}{\pi} + \frac{1}{2} = u \Rightarrow y = \tan(\pi(u - 0{,}5)).$$

```
n=10000;
u=rand(n,1);
y=tan(pi*(u-0.5));
cond0=(y>0);
pb=sum(cond0)/n
cond1=(y>1);
pc=sum(cond1)/n
```

**Ejercicio 8**. Se dispone de dos procesadores que funcionan independientemente el uno del otro. Las tareas llegan al procesador $i$ de acuerdo a un proceso de Poisson de parámetro $\lambda_i$ tareas por unidad de tiempo, $i = 1, 2$. Suponiendo que $\lambda_1 = 0{,}5$ y $\lambda_2 = 3{,}5$:

a) Determine la probabilidad de que lleguen al menos dos tareas a cada procesador dentro del intervalo de tiempo $[0, t_0 = 3]$.

b) Complete el siguiente código en MATLAB/Octave para aproximar por simulación la probabilidad pedida en el apartado a).

```
n=30000;
n1=poissrnd(__________,n,1);
n2=poissrnd(__________,n,1);
cond=(n1>=2 ________);
prob=sum(cond)/n
```

**Solución**:

a) Nos piden $\Pr(N_1(t_0) \geq 2 \cap N_2(t_0) \geq 2)$, siendo $N_1(t_0)$ el número de tareas que llegan al procesador 1 en $[0, t_0]$ y $N_2(t_0)$ el número de tareas que llegan al procesador 2 en $[0, t_0]$. Por la reproductividad de la Poisson se verifica que $N_1(t_0) \sim \mathit{Poisson}(\lambda_1 \times t_0)$ y $N_2(t_0) \sim \mathit{Poisson}(\lambda_2 \times t_0)$. De modo que:

$$\begin{aligned}
\Pr(\{N_1(t_0) \geq 2\} \cap \{N_2(t_0) \geq 2\}) &= \Pr(N_1(t_0) \geq 2) \Pr(N_2(t_0) \geq 2) \\
&= (1 - \frac{e^{-\lambda_1 t_0}(\lambda_1 t_0)^0}{0!} - \frac{e^{-\lambda_1 t_0}(\lambda_1 t_0)^1}{1!}) \\
&\quad (1 - \frac{e^{-\lambda_2 t_0}(\lambda_2 t_0)^0}{0!} - \frac{e^{-\lambda_2 t_0}(\lambda_2 t_0)^1}{1!}) = 0{,}4420,
\end{aligned}$$

para $t_0 = 3$, $\lambda_1 = 0{,}5$ y $\lambda_2 = 3{,}5$.

b) EL código en MATLAB/Octave sería:

```
n=30000;
n1=poissrnd(0.5*3,n,1);
n2=poissrnd(3.5*3,n,1);
cond=(n1>=2 & n2>=2);
prob=sum(cond)/n
```

**Ejercicio 9**. Un vehículo se desplaza en linea recta en la dirección del eje de abscisas y en sentido positivo a una velocidad constante de $a$ unidades. Aleatoriamente se elige una dirección al azar de modo que dicha dirección forma un ángulo $\theta$ con el movimiento del vehículo. Supóngase que $\theta$ se distribuye según un modelo uniforme continuo en $(0, \pi)$. Sabiendo que la velocidad efectiva del vehículo en la dirección aleatoria viene dada por la expresión $V = a\cos(\theta)$, se pide:

a) Determine la función de densidad y la función de distribución de la velocidad efectiva.

b) Calcule la velocidad media efectiva del vehículo en la dirección aleatoria.

c) Complete el siguiente código en MATLAB/Octave que genera valores de $V$ y aproxima por simulación la probabilidad de que la velocidad media efectiva sea mayor a 15 km/h suponiendo que $a = 25$ km/h.

```
n=10000;
a=25;
u=rand(n,1);
v= ____ * cos(pi*__);
prob= sum(____)/n
```

Nota: Tenga en cuenta que $\frac{\partial \arccos(y)}{\partial y} = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$.

**Solución**:

a) Sabemos que $V = g(\theta)$, donde $g(x) = a\cos(x)$, si $x \in (0,\pi)$. Dado que $g$ es una función derivable e inyectiva, se puede utilizar la expresión siguiente para calcular la densidad de $V$,

$$f_V(v) = f_\theta(x(v)) \left| \frac{\mathrm{d}x(v)}{\mathrm{d}v} \right|.$$

Se tiene que $x(v) = \arccos(v/a)$, lo que implica que $\frac{\mathrm{d}x(v)}{\mathrm{d}v} = \frac{-1/a}{\sqrt{1-(v/a)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{a^2-v^2}}$, si $v \in (-a,a)$. Dado que $\theta \sim U(0,\pi)$, sabemos que $f_\theta(x) = \frac{1}{\pi}$, si $x \in (0,\pi)$. De modo que

$$f_V(v) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-v^2}}, \text{ si } v \in (-a,a).$$

Calculemos ahora la distribución de $V$. Se tiene que

$$\begin{aligned} F_V(v) &= \int_{-\infty}^{v} f_V(z)\mathrm{d}z = \int_{-a}^{v} \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-z^2}}\mathrm{d}z \\ &= \frac{-1}{\pi}\arccos(z/a)\Big]_{-a}^{v} = \frac{1}{\pi}\arccos(-1) - \frac{1}{\pi}\arccos(v/a) = 1 - \frac{\arccos(v/a)}{\pi}. \end{aligned}$$

Es decir,

$$F_V(v) = \begin{cases} 0, & v \leq -a, \\ 1 - \frac{\arccos(v/a)}{\pi}, & v \in (-a,a), \\ 1, & v \geq a. \end{cases}$$

b) Para calcular la media de $V$ lo más sencillo es aplicar la fórmula de la media de una transformación, es decir,

$$\begin{aligned} E[V] &= E[a\cos(\theta)] = \int_0^\pi a\cos(x) f_\theta(x)\mathrm{d}x = \int_0^\pi a\cos(x)\frac{1}{\pi}\mathrm{d}x = \frac{a}{\pi}\sin(x)\Big]_{x=0}^{x=\pi} \\ &= \frac{a}{\pi}(\sin(\pi) - \sin(0)) = 0. \end{aligned}$$

c) El código completo sería como se indica a continuación,

```
n=10000;
a=25;
u=rand(n,1);
v=a*cos(pi*u); % también valdría v=a*cos(pi*(1-u));
prob= sum(v>15)/n
```