

Definición axiomática de probabilidad

Ejemplo 1:

Para el experimento aleatorio de tirar un dado, el espacio muestral es $W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. En este espacio el conjunto de sucesos es $P(W) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \dots, \{1,2\}, \{1,3\}, \dots, \{1,2,3,4,5,6\}\}$. Para establecer una probabilidad hay que asignar un número a todos esos sucesos.

Sin embargo si se ha asignado a los sucesos elementales $p(\{1\}) = p(\{2\}) = \dots = p(\{6\}) = 1/6$, por la propiedad ii), p.e. la probabilidad del suceso $\{1, 3\}$ es $p(\{1,3\}) = p(\{1\}) + p(\{3\}) = 2/6$.

Nota: El suceso $\{1\}$ es: "el resultado de tirar el dado es la cara 1", el suceso $\{1, 3\}$ es: "el resultado de tirar el dado es la cara 1, o la 3", el suceso $\{1, 3, 5\}$ es: "el resultado de tirar el dado es una cara impar".

Propiedades de la probabilidad

Ejemplo 2:

Un 15% de los pacientes atendidos en un hospital son hipertensos, un 10% son obesos y un 3% son hipertensos y obesos. ¿Qué probabilidad hay de que elegido un paciente al azar sea obeso o hipertenso?

$$A = \{\text{obeso}\} \quad B = \{\text{hipertenso}\}$$

$$A \cap B = \{\text{hipertenso y obeso}\}$$

$$A \cup B = \{\text{obeso o hipertenso}\}$$

$$p(A) = 0,10; \quad p(B) = 0,15; \quad p(A \cap B) = 0,03$$

$$p(A \cup B) = 0,10 + 0,15 - 0,03 = 0,22$$

Probabilidad condicionada

Ejemplo 3:

Una mujer es portadora de la enfermedad de Duchenne ¿Cuál es la probabilidad de que su próximo hijo tenga la enfermedad?

Según las leyes de Mendel, todos los posibles genotipos de un hijo de una madre portadora (xX) y un padre normal (XY) son xX, xY, XX, XY y tienen la misma probabilidad. El espacio muestral es $W = \{xX, xY, XX, XY\}$
el suceso $A = \{\text{hijo enfermo}\}$ corresponde al genotipo xY, por tanto, según la definición clásica de probabilidad
 $p(A) = 1/4 = 0,25$

La mujer tiene el hijo y es varón ¿qué probabilidad hay de que tenga la enfermedad?

Se define el suceso $B = \{\text{ser varón}\} = \{xY, XY\}$
la probabilidad pedida es $p(A|B)$ y aplicando la definición anterior
 $p(B) = 0,5$; $A \cap B = \{xY\}$; $p(A \cap B) = 0,25$; $p(A|B) = 0,25/0,5 = 0,5$

Si sabemos que es varón, el espacio muestral ha cambiado, ahora es B. Por lo tanto se puede calcular $p(A|B)$ aplicando la definición clásica de probabilidad al nuevo espacio muestral
 $p(A|B) = 1/2 = 0,5$

Ejemplo 4:

Se sabe que el 50% de la población fuma y que el 10% fuma y es hipertensa. ¿Cuál es la probabilidad de que un fumador sea hipertenso?

$A = \{\text{ser hipertenso}\}$ $B = \{\text{ser fumador}\}$
 $A \cap B = \{\text{ser hipertenso y fumador}\}$
 $p(A|B) = 0,10/0,50 = 0,20$

Obsérvese que los coeficientes falso-positivo y falso-negativo de las pruebas diagnósticas son probabilidades condicionadas.

La fórmula anterior se puede poner $p(A \cap B) = p(B) p(A|B) = p(A) p(B|A)$
llamada *regla de la multiplicación*, que se puede generalizar a más sucesos
 $p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = p((A_1 \cap A_2) \cap A_3) = p(A_1 \cap A_2) p(A_3|A_1 \cap A_2) = p(A_1) p(A_2|A_1) p(A_3|A_1 \cap A_2)$

En general $p(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots) = p(A_1) p(A_2|A_1) p(A_3|A_1 \cap A_2) \dots$
llamado *principio de las probabilidades compuestas* y especialmente útil para aquellas situaciones en que las probabilidades condicionadas son más fáciles de obtener que las probabilidades de las intersecciones.

Ejemplo 5:

Se sabe por estudios previos que el 0,1% de la población tiene problemas vasculares. Un estudio sobre individuos con problemas vasculares revela que el 20% de ellos son placas de ateroma. Si el 10% de los individuos con placas de ateroma están expuestos a muerte súbita por desprendimiento de trombos ¿qué probabilidad tiene un individuo cualquiera de estar expuesto a muerte súbita por desprendimiento de trombos de una placa de ateroma?

$A_1 = \{\text{problemas vasculares}\}$; $A_2 = \{\text{placas de ateroma}\}$; $A_3 = \{\text{expuesto a muerte súbita por ...}\}$

$p(A_1) = 0,001$; $p(A_2|A_1) = 0,20$; $p(A_3|A_1 \text{ } \cap \text{ } A_2) = 0,1$

$p(A_1 \text{ } \cap \text{ } A_2 \text{ } \cap \text{ } A_3) = 0,001 \times 0,20 \times 0,1 = 0,000002$

Ejemplo 6:

Una urna contiene 10 bolas, de las cuales 3 son rojas, 5 verdes y 2 azules. Se extraen al azar 3 bolas. Calcular la probabilidad de que la primera sea azul, y las otras dos verdes.

Definimos $A_1 = \{\text{la 1ª bola es azul}\}$; $A_2 = \{\text{la 2ª bola es verde}\}$; $A_3 = \{\text{la 3ª bola es verde}\}$

$p(A_1) = 2/10$ aplicando la definición clásica de probabilidad, puesto que hay 10 bolas y 2 son verdes.

$p(A_2|A_1) = 5/9$; si la primera bola extraída es azul, en la urna quedan 9 bolas, 5 de ellas verdes.

$p(A_3|A_1 \text{ } \cap \text{ } A_2) = 4/8$; si la primera bola extraída es azul y la segunda verde en la urna quedan 8 bolas, 4 de ellas verdes.

$p(A_1 \text{ } \cap \text{ } A_2 \text{ } \cap \text{ } A_3) = 2/10 \times 5/9 \times 4/8 = 1/18$

Sucesos independientes

Ejemplo 7:

Para un hijo de una mujer portadora de Duchenne, el sexo y la enfermedad ¿son independientes?

Según vimos en el Ejemplo 3 el espacio muestral es $W = \{xX, xY, XX, XY\}$

Definimos los sucesos $A = \{\text{varón}\} = \{xY, XY\}$; $B = \{\text{enfermo}\} = \{xY\}$

$A \text{ } \cap \text{ } B = \{xY\}$

por lo tanto $p(A) = 0,5$; $p(B) = 0,25$; $p(A \text{ } \cap \text{ } B) = 0,25 \neq p(A) p(B)$ NO son independientes.

Regla de la probabilidad total

Ejemplo 8:

La prevalencia de infarto cardíaco para hipertensos es del 0,3% y para no hipertensos del 0,1%. Si la prevalencia de hipertensión en una cierta población es del 25% ¿Cuál es la prevalencia del infarto en esa población?

$A_1 = \{\text{ser hipertenso}\}$ $A_2 = \{\text{no serlo}\}$ estos sucesos constituyen una partición

$B = \{\text{padecer infarto}\}$

datos: $p(B|A_1) = 0,003$; $p(B|A_2) = 0,001$; $p(A_1) = 0,25$

evidentemente $p(A_2) = 0,75$ por la propiedad 1

$$p(B) = 0,003 \times 0,25 + 0,001 \times 0,75 = 0,0015$$

Teorema de Bayes

Ejemplo 9:

una prueba diagnóstica para la diabetes tiene un CFP de 4% y un CFN del 5%. Si la prevalencia de la diabetes en la población donde se usa es del 7% ¿cuál es la probabilidad de que sea diabético un individuo en el que la prueba dé positiva? y ¿de que no lo sea uno en el que dé negativo?

$$p(+|NE) = 0,04 \text{ } \text{ } p(-|NE) = 0,96$$

$$p(-|E) = 0,05 \text{ } \text{ } p(+|E) = 0,95$$

$$p(E) = 0,07 \text{ } \text{ } p(NE) = 0,93$$

$$p(E|+) = \frac{0,95 \times 0,07}{0,95 \times 0,07 + 0,04 \times 0,93} = 0,641$$

y

$$p(NE|-) = \frac{0,96 \times 0,93}{0,05 \times 0,07 + 0,96 \times 0,93} = 0,996$$

Pruebas en serie: Cuando se aplican pruebas en serie, para cada prueba $p(E)$ y $p(NE)$, serán la $p(E|+)$ y $p(NE|+)$ de la prueba anterior (si dio positiva) o $p(E|-)$ y $p(NE|-)$ si dio negativa.